Unidade V – Geometria Analítica II: Estudo das Cônicas

1 – Situando a Temática

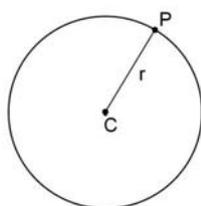
As cônicas foram de fundamental importância para o desenvolvimento da astronomia, sendo descritos na antiguidade por Apolônio de Perga, um geômetra grego. Mais tarde, Kepler e Galileu mostraram que essas curvas ocorrem em fenômenos naturais como nas trajetórias de um projétil ou de um planeta.

2 – Problematizando a Temática

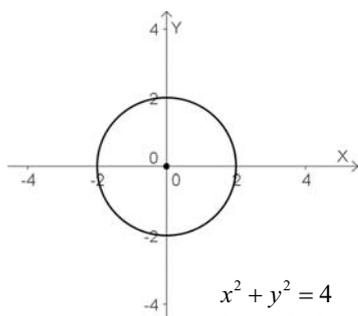
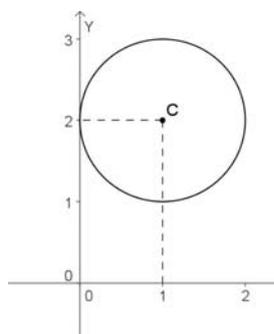
Vimos nas seções anteriores, por exemplo, que a equação $-2x+5y+8=0$ representa uma reta *r* no plano cartesiano. Do mesmo modo como fizemos com a reta *r*, vamos aqui associar a cada cônica (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) uma equação e, a partir daí, estudar as suas propriedades.

3 – Conhecendo a Temática

3.1 – Circunferência

Sabemos da geometria elementar que circunferência é o conjunto de todos os pontos eqüidistantes de um ponto fixo $C=(a,b)$ denominado centro da circunferência.

Considerando o centro da circunferência como sendo o ponto $C=(a,b)$, *r* sendo o raio e $P=(x,y)$ um ponto da circunferência, temos:

$$d(C,P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Portanto, uma circunferência de centro $C=(a,b)$ e raio *r* tem equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, denominada **Equação Reduzida** da circunferência.

$x^2+y^2=4$
Circunferência
de centro C=(0,0)
e raio 2.

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$
Circunferência
de centro C=(1,2)
e raio 1.

Desenvolvendo a equação reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ temos: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Esta equação é chamada **equação geral** da circunferência.

Exercício 1: Determine o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2-4x-8y+19=0$.

Solução:

Da equação geral $x^2+y^2-4x-8y+19=0$, vamos encontrar a equação reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Vamos utilizar um processo conhecido como completamento de quadrados. Para isso, lembramos que $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ e $y^2-2bx+b^2=(y-b)^2$.

Com base na equação $x^2+y^2-4x-8y+19=0$ separamos os termos que envolvam as variáveis *x* e *y*, da seguinte forma:

I) $x^2 \underbrace{-4}_{\substack{2a=4\\ a=2\\ a^2=4}} x = \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4=(x-2)^2-4$ e II) $y^2 \underbrace{-8}_{\substack{2b=8\\ b=4\\ b^2=16}} y = \underbrace{y^2-8y+16}_{(y-4)^2}-16=(y-4)^2-16$

Desta maneira, de (I) e (II) temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + 19 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$

Logo, a equação $(x-2)^2+(y-4)^2=1$ representa uma circunferência de centro $C=(2,4)$ e raio 1.

No Moodle...

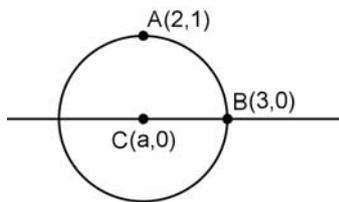
Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo completamento de quadrado. Aproveite para exercitar já que trabalharemos essa ferramenta com bastante freqüência.

Exercício 2: Determine a equação da circunferência que passa pela origem e tem centro no ponto $C = (3,4)$.

Solução: A equação da circunferência é $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Como esta circunferência tem centro no ponto C = (3,4) então $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$. A origem (0,0) é um ponto da circunferência e assim podemos escrever:

$$(0-3)^2+(0-4)^2=r^2 \Rightarrow \ 9+16=r^2 \quad \Rightarrow \boxed{r^2=25}.$$

Portanto, $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ é a equação da circunferência pedida.

Exercício 3: A circunferência representada no gráfico abaixo passa pelos pontos A e B. Determine sua equação reduzida.

Solução:

A equação reduzida da circunferência de centro C = $(a,0)$ é $(x-a)^2+(y-0)^2=r^2$. Como $A=(2,1)$ e $B=(3,0)$ pertencem à circunferência, temos:

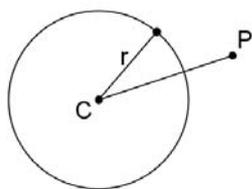
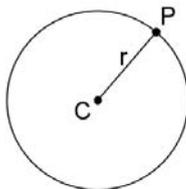
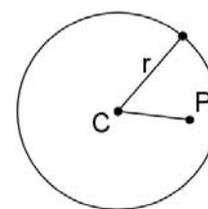
$$(I)\ (2-a)^2+1^2=r^2 \qquad\qquad (II)\ (3-a)^2+0=r^2$$

De (I) e (II) temos $(2-a)^2+1=(3-a)^2$, ou seja, $4-4a+\cancel{a^2}+1=9-6a+\cancel{a^2}$ e, portanto $a=2$. Desta forma, a equação reduzida da circunferência é $(x-2)^2+y^2=r^2$.

Vamos determinar o valor de r^2. Para isso lembramos que o ponto B = (3,0) pertence à circunferência, assim: $(3-2)^2+0^2=r^2 \Rightarrow \boxed{1=r^2}$.

Portanto $(x-2)^2+y^2=1$ é a equação reduzida da circunferência pedida.

3.1.2 – Posição de um Ponto em Relação a uma Circunferência

Em relação à circunferência $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, um ponto $P=(m,n)$ pode ocupar as seguintes posições:

P é exterior à circunferência se, e somente se, $d(P,c) > r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$.
(Figura 1)

P pertence à circunferência se, e somente se, $d(P,c) = r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$.
(Figura 2)

P é interior à circunferência se, e somente se, $d(P,c) < r$, ou seja, $(m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$.
(Figura 3)

Assim para determinar a posição de um ponto $P = (m,n)$ em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas desse ponto na expressão $(x-a)^2 + (y-b)^2$ e observar que:

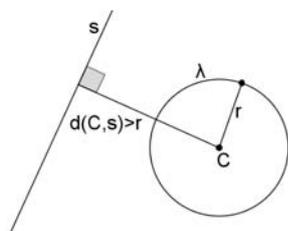
1º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 > r^2$, P é exterior à circunferência (Figura 1);

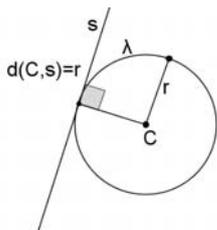
2º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2$, P pertence à circunferência (Figura 2);

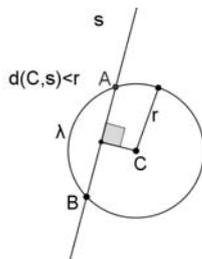
3º caso: Se $(m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2$, P é interior à circunferência (Figura 3).

3.1.3 – Posições Relativas entre Reta e Circunferência

Analogamente, como fizemos na seção anterior, dado uma reta $s: Ax + By + D = 0$ e uma circunferência $\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ temos três posições relativas possíveis da reta s e a circunferência.

Caso 1: s é exterior a circunferência $(s \cap \lambda = \varnothing)$;

Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é maior do que o raio r.

Caso 2: s é tangente à circunferência $(s \cap \lambda = P(x_0, y_0))$;

Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é igual ao raio **r.**

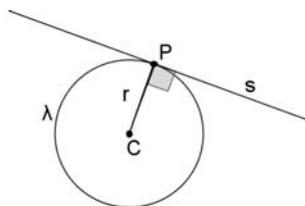
Caso 3: s é secante à circunferência $\left(s \cap \lambda = \{A, B\}\right)$.

Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é menor do que o raio r.

Sabemos que a distância entre um ponto $C = (a, b)$ e uma reta $s: Ax + By + D = 0$ é dada por $d(C, s) = \dfrac{|Aa + Bb + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, e assim basta calcular o valor de $d(C, s)$ e verificar qual dos casos acima teremos. Veja o exercício abaixo.

Exercício 4: Qual é a posição da reta $s: 3x + y - 19 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. Caso a reta intercepte a circunferência, encontre os referidos pontos de intersecção.

Solução: Primeiramente vamos determinar a posição da reta s em relação à circunferência. Para isso vamos calcular a distância do centro $C = (2, 3)$ da circunferência à reta $s: 3x + y - 19 = 0$.

Logo, $d(C, s) = \dfrac{|3.2 + 1.3 - 19|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{|-10|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$.

Como $d(C, s) = r, \left(r = \sqrt{10}\right)$ então a reta s é tangente à circunferência λ.

Iremos agora determinar o ponto $P = (x_0, y_0)$ que é intersecção entre a reta $s: 3x + y - 19 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Observe que $P \in s$ e $P \in \lambda$ e assim o ponto $P = (x_0, y_0)$ satisfaz as equações $\begin{cases} 3x + y - 19 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{cases}$.

Vamos encontrar a solução do sistema acima para determinar o ponto $P(x_0, y_0)$.

Temos:

$$\begin{cases} 3x + y - 19 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} `y = -3x + 19 \ (I) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 10 \ (II) \end{cases}$$

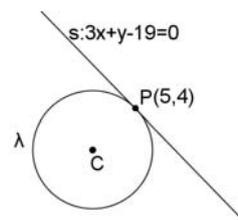
Substituindo (I) em (II) temos:

$$(x-2)^2 + (-3x + 19 - 3)^2 = 10 \Rightarrow (x-2)^2 + (-3x + 16)^2 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 96x + 256 = 10 \Rightarrow 10x^2 - 100x + 250 = 0 \ (\div 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - 10x + 25 = 0}.$$

E assim $x' = x'' = 5$ (note que encontramos uma única solução, pois a reta s é tangente à λ). Desta forma, como $y = -3x + 19$ encontramos $y = -3.5 + 19 = 4$ e o ponto de tangência entre a reta s e λ é o ponto $P = (5, 4)$.

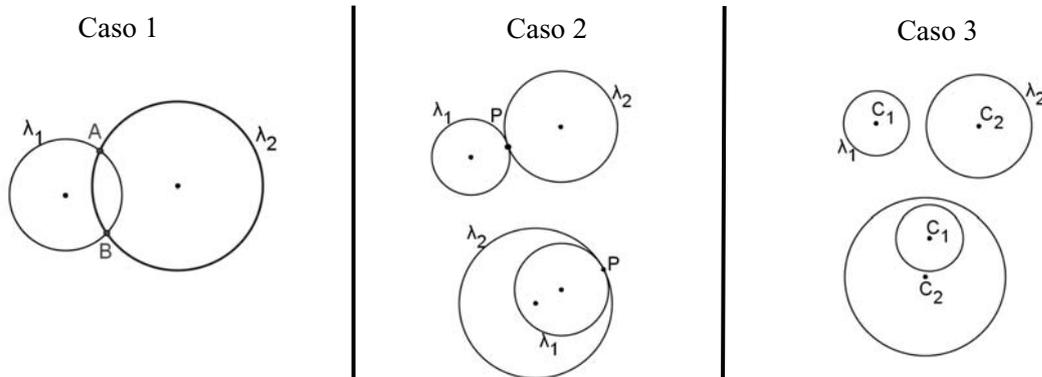
O exercício 4 nos leva a pensar e concluir que em qualquer uma das três possíveis posições relativas entre a reta $s: Ax + By + D = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ o conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema

$$(*)\begin{cases} Ax+By+D=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}.$$

Esse sistema poderá ser classificado como:

- Impossível se, e somente se, a reta ***s*** é exterior à circunferência λ;
- Possível com solução única se, e somente se, a reta ***s*** é tangente à circunferência λ;
- Possível com duas soluções se, e somente se, a reta ***s*** é secante à circunferência λ.

> **Observação:** Note que, do sistema $(*)$ resultará uma equação do 2° grau e assim o valor do discriminante (Δ), dessa equação determinará a posição relativa entre a reta ***s*** e a circunferência **λ**.

3.1.4- Posições Relativas entre duas Circunferências

Dadas duas circunferências $\lambda_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ e $\lambda_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ distintas, podemos obter dois, um ou nenhum ponto em comum.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \lambda_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0 \\ \lambda_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0 \end{cases}$ descobrimos quantos e quais são os pontos comuns entre λ_1 e λ_2. Além disso, no segundo caso (um ponto comum) e no terceiro caso (nenhum ponto em comum) podemos identificar a posição relativa usando os raios, r_1 e r_2, e a distância entre os centros $d(C_1,C_2)$.

Vejamos o exercício resolvido a seguir.

Exercício 5: Verificar a posição relativa entre as circunferências dadas.

$(a)\ \lambda: x^2+y^2=30$ e $\alpha:(x\text{-}3)^2+y^2=9$

$(b)\ \lambda:(x+2)^2+(y-2)^2=1$ e $\alpha: x^2+y^2=1$

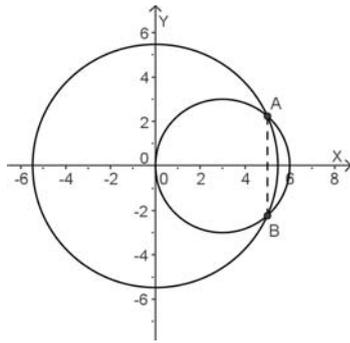
Solução:

(a) Como já discutimos anteriormente vamos classificar o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=30 \\ (x\text{-}3)^2+y^2=9 \end{cases}$.

Acompanhe:

$$\begin{cases} x^2+y^2-30=0 \\ (x\text{-}3)^2+y^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-30=0\ .(-1) \\ x^2+y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+30=0 \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x+30=0 \Rightarrow \boxed{x=5}.$$

Logo substituindo $x = 5$ em uma das equações, obteremos $y = \pm\sqrt{5}$. Portanto os pontos $A = \left(5, \sqrt{5}\right)$ e $B = \left(5, -\sqrt{5}\right)$ são soluções do sistema e assim as duas circunferência são secantes cujos pontos em comum são *A* e *B*. Observe a representação gráfica gerada pelo software Geogebra:

b) Montando o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$$

Agora, vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \ (I) \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0 \ (II) \end{cases}.$$

Fazendo *I* = *II* e efetuando as devidas operações obtemos:

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 1 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 4x - 4y + 7 \Rightarrow \quad 4x - 4y + 7 = -1 \Rightarrow$$

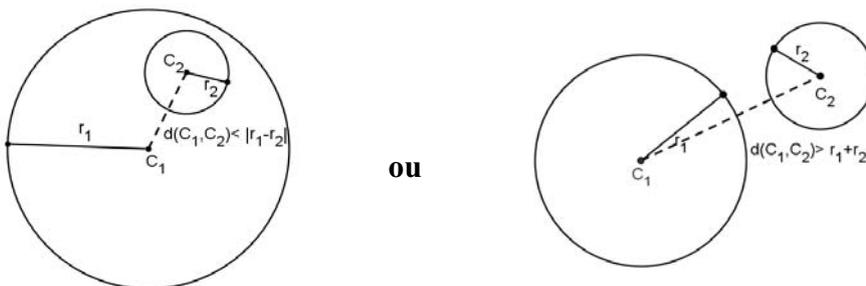
$$\Rightarrow 4x = 4y - 8 \ \Rightarrow \ \boxed{x = y - 2}.$$

Substituindo agora $x = y - 2$ na equação (I) teremos:

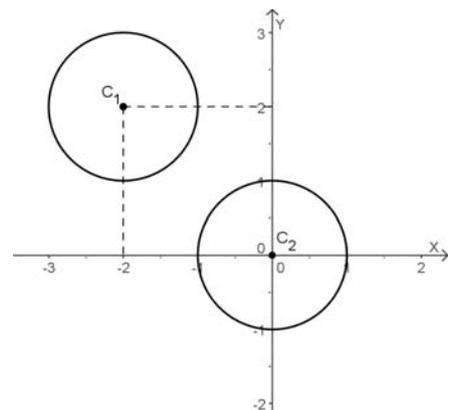
$$(y-2)^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \quad y^2 - 4y + 4 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \quad 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = -8 < 0}.$$

Como $\Delta < 0$, não existe solução para o sistema e assim concluímos que as circunferências não possuem pontos em comum.

Vejamos agora qual das duas situações abaixo se verifica:

ou

Vamos calcular $d(C_1, C_2)$. Como $C_1 = (-2, 2)$ $\left(\lambda : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\right)$ e $C_2 = (0,0)$ $\left(\alpha : x^2 + y^2 = 1\right)$ então

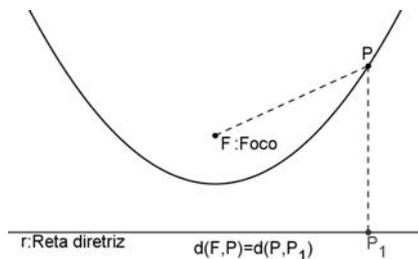
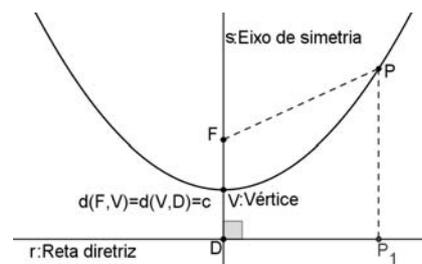
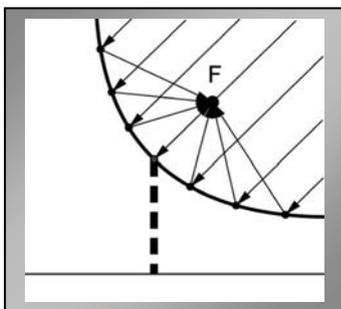
$$d(C_1, C_2) = \sqrt{\left(0 - (-2)\right)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

Note que $r_1 = 1,\ r_2 = 1$ e $r_1 + r_2 = 2$. Como $d(C_1, C_2) = \sqrt{8} > r_1 + r_2 = 2$ então as circunferências são externas. Veja a representação geométrica dessas circunferências.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo circunferências. Acesse e participe!

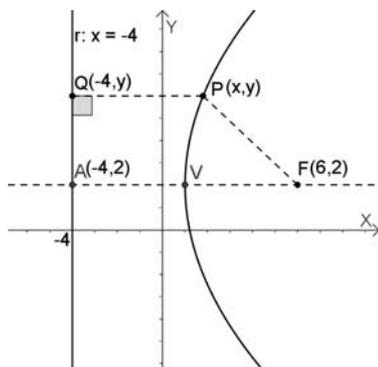
3.2- Parábola

Podemos visualizar concretamente uma parábola, dirigindo um jato d'água de uma mangueira obliquamente para cima e observando a trajetória percorrida pela água. Essa trajetória é parte de uma parábola.

Definição: Dados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chamamos de parábola o conjunto dos pontos desse plano eqüidistantes da reta r e do ponto F.

O ponto F é denominado foco da parábola e a reta r é denominada diretriz da parábola. O eixo de simetria da parábola é a reta s, que passa por F e é perpendicular à diretriz r.

Observe que $d(F,V) = d(V,D) = c$ e assim o ponto V nada mais é que o ponto médio do segmento $\overline{FD}$, e é denominado vértice da parábola.

Ampliando o seu conhecimento...

Se um satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas, que por sua vez, significarão filmes, telejornais e outros programas que você assiste normalmente com maior qualidade.

Nosso objetivo é determinar uma equação que represente uma parábola. Desta forma, a partir do foco F e da reta diretriz r, podemos chegar à equação da parábola que é formada por todos os pontos $P = (x, y)$ do plano tal que $d(P,F) = d(P,r)$.

Como ilustração, vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta $r: x = -4$ e como foco o ponto $F = (6,2)$ conforme figura abaixo:

Os pontos $P = (x, y)$ que pertencem à parábola são tais que $d(P,F) = d(P,Q)$, onde $Q = (-4, y)$.

Assim :

$$d(P,F) = d(P,Q) \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow \ (y-2)^2 = (x+4)^2 - (x-6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 + 12x - 36 \Rightarrow \boxed{(y-2)^2 = 20(x-1)}.$$

Portanto a equação $(y-2)^2 = 20(x-1)$ é a equação da parábola que possui foco $F = (6,2)$ e reta diretriz $r: x = -4$.

Sabemos que o vértice V da parábola é o ponto médio do segmento $\overline{FA}$, onde $F = (6,2)$ e $A = (-4,2)$ e assim $V = \left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{V = (1,2)}$.

Pela distância de V até F encontramos um valor c dado por:

$$c=d(V,F)=\sqrt{(6-1)^2+(2-2)^2}=5.$$

Observe agora que na equação $(y-2)^2=20(x-1)$, obtida anteriormente, aparecem as coordenadas do vértice $x_v=1$ e $y_v=2$ e também o valor $c=5$:

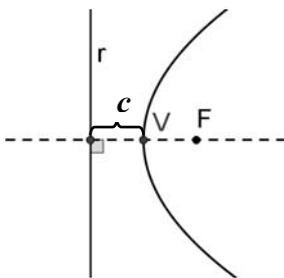
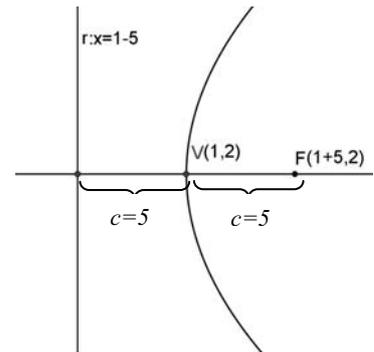
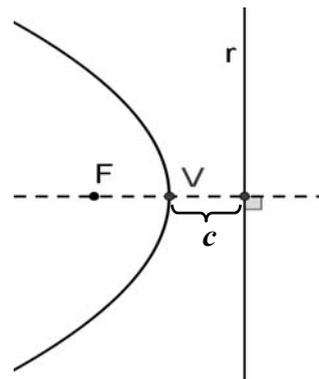
$$\left(y-\underbrace{2}_{y_v}\right)^2=\underbrace{20}_{4.c}\left(x-\underbrace{1}_{x_v}\right)$$

Reciprocamente, a partir da equação da parábola, $(y-2)^2=20(x-1)$, podemos chegar ao vértice *V* e o valor de c, e daí, teremos o foco *F* e a diretriz *r*.

Dada a equação $(y-2)^2=20(x-1)$. Obtemos $V=(1,2)$ e $c=5$.

Generalizando, podemos, a partir do foco e da reta diretriz, determinar o vértice $V=(x_v,y_v)$ e o valor de $c=d(V,F)$ como também a equação reduzida da parábola.

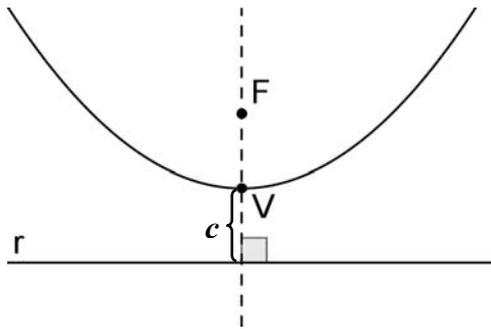
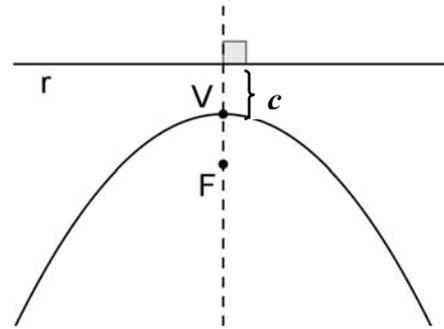
Veja os casos possíveis.

Caso 1: A reta diretriz *r* é paralela ao eixo *0y*;

Se a concavidade é voltada para a direita, então a equação reduzida da parábola é:

$$(y-y_v)^2=4c(x-x_v).$$

Se a concavidade é voltada para a esquerda, então a equação reduzida da parábola é:

$$(y-y_v)^2=-4c(x-x_v).$$

Observações: Note que, quando a reta diretriz é paralela ao eixo *0y*, o fator da equação que contém a variável *y* ficará elevado ao quadrado. Analogamente, se a reta diretriz é paralela ao eixo *0x*, o fator da equação que contém a variável *x* ficará elevado ao quadrado, veja nas ilustrações a seguir.

Caso 2: A reta diretriz r é paralela ao eixo $0x$.

Se a concavidade é voltada para cima, então a equação reduzida da parábola é:

$$(x-x_v)^2 = 4c.(y-y_v).$$

Se a concavidade é voltada para baixo, então a equação reduzida da parábola é:

$$(x-x_v)^2 = -4c.(y-y_v).$$

Faremos alguns exercícios para que possamos assimilar e trabalhar melhor a equação reduzida de uma parábola.

Exercício 1: Se uma parábola possui equação $x^2-4x-12y-8=0$, determine as coordenadas do vértice, do foco e a equação da reta diretriz.

Solução:

Primeiramente vamos fazer o completamento do quadrado na variável x.

Temos: $x^2 - \underbrace{4}_{\substack{2a \\ a=2}} x = x^2-4x+\underbrace{4}_{a^2}-4 = (x-2)^2-4$.

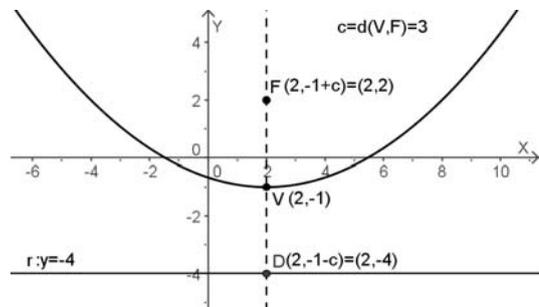
Desta forma a equação $x^2-4x-12y-8=0$ pode ser escrita na forma:

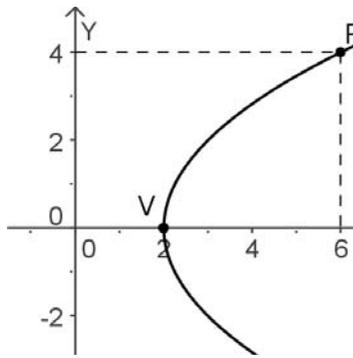
$$(x-2)^2-4-12y-8=0 \Rightarrow (x-2)^2=12y+12 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2=12(y+1)}.$$

Portanto, da equação da parábola $(x-2)^2=12(y+1)$ obtemos $V=(2,-1)$ e $4c=12 \Rightarrow c=\dfrac{12}{4}=3$.

Como na equação $(x-2)^2=12(y+1)$ o termo envolvendo a variável x está elevado ao quadrado, então pelos casos vistos anteriormente, a reta diretriz é paralela ao eixo $0x$.

Utilizando o vértice $V=(2,-1)$ e o valor $c=3=d(V,F)$, encontraremos o foco e a reta diretriz da parábola esboçando um gráfico no plano cartesiano. Observe:

Logo, $V=(2,-1)$, $F=(2,2)$ e a reta diretriz é $r: y=-4$.

Exercício 2: Determine a equação da parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo $0y$, vértice $V=(2,0)$ e que passa pelo ponto $P=(6,4)$.

Solução: Fazendo um esboço gráfico do vértice $V=(2,0)$, do ponto $P=(6,4)$ e partindo do fato que o eixo de simetria é perpendicular ao eixo $0y$, a nossa parábola tem a seguinte forma:

Logo, pelos casos já mostrados anteriormente, a nossa parábola possui a seguinte equação: $(y-y_v)^2 = 4c(x-x_v) \Rightarrow (y-0)^2 = 4c(x-2) \Rightarrow \boxed{y^2 = 4c(x-2)}$.

Como o ponto $P(6,4)$ pertence à parábola então:

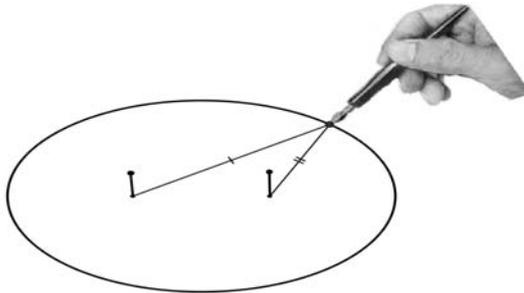
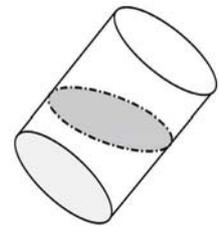
$$4^2 = 4c(6-2) \Rightarrow 16 = 16c \Rightarrow \boxed{c=1}.$$

Portanto a equação da parábola é $y^2 = 4(x-2)$.

No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

3.3- Elipse

Em um copo, no formato cilíndrico circular, despeje até a metade do copo um refrigerante de sua escolha. Depois incline o copo e mantenha-o fixo. A figura formada pelo refrigerante na lateral do copo é uma ilustração concreta de uma elipse.

Existe outra maneira de se obter uma elipse, em uma tábua pregue dois pregos e arame neles as extremidades de um barbante maior que a distância entre os pregos; a seguir desenhe uma linha na tábua com o auxilio de um lápis apoiado no barbante, mantendo-a o mais esticado possível.

Definição: Fixado dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tal que $d(F_1,F_2)=2c,\ c>0,$ chama-se elipse o conjunto dos pontos $P=(x,y)$ cuja soma das distâncias $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é uma constante $2a$, com $2a > 2c$.

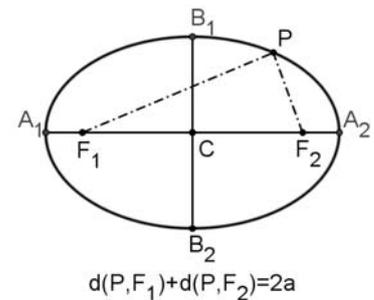
Na figura ao lado temos:

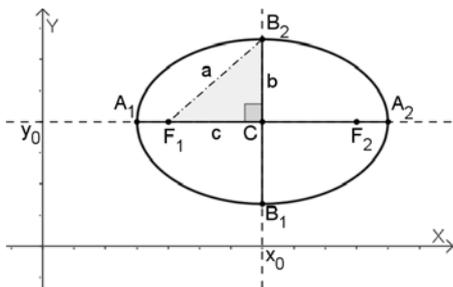
(I) F_1 e F_2 são focos da elipse e a distância focal $d(F_1,F_2)=2c$;

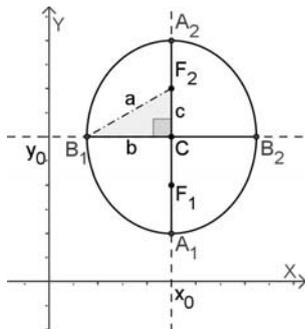
(II) $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e $d(A_1,A_2)=2a$;

(III) $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse e $d(B_1,B_2)=2b$;

(IV) C é o centro da elipse e é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, e mais, $d(C,F_1)=d(C,F_2)=c$.

V) O numero $e=\dfrac{c}{a}$ chama-se excentricidade da elipse.

Dada uma elipse de centro $C=(x_0,y_0)$, temos os seguintes casos:

Caso 1: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo *0x;*

Neste caso, mostra-se que a elipse pode ser representada pela equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, com $b^2=a^2-c^2$ (Teorema de Pitágoras).

Caso 2: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo 0y.

Neste caso, a elipse pode ser representada pela equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$, com $b^2=a^2-c^2$.

A demonstração destas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P=(x,y)$ é um ponto da elipse de centro $C=(x_0,y_0)$ e foco $F_1=(x_0+c,y_0)$ e $F_2=(x_0-c,y_0)$ (eixo maior paralelo ao eixo *0x*), por exemplo, então desenvolvendo $d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a$, onde $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)$, obtemos a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, e mais $b^2=a^2-c^2$.

Teremos a oportunidade em nossas aulas de discutir o desenvolvimento da equação reduzida da elipse pelo desenvolvimento de $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$.

Exercício 1: Determinar a equação da elipse de centro na origem e eixo maior horizontal, sendo $2a=10$ e $2c=6$ (distância focal).

Solução: Temos $2a=10\Rightarrow \boxed{a=5}$ e $2c=6\Rightarrow \boxed{c=3}$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $b^2=25-9\Rightarrow b^2=16\Rightarrow \boxed{b=4}$.

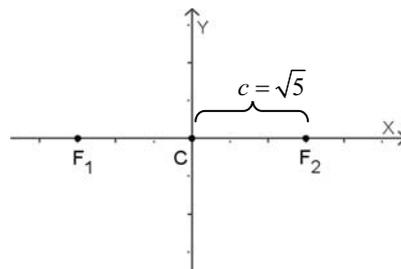
Se o eixo maior é horizontal e o centro é na origem, a equação é da forma $\frac{x^2}{\underbrace{a^2}_{\text{eixo maior horizontal}}}+\frac{y^2}{b^2}=1$, assim:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Exercício 2: Determinar os focos e a excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Solução: Observe que o centro dessa elipse é o ponto $C=(0,0)$, que $a^2=9\Rightarrow a=3$ e que $b^2=4\Rightarrow b=2$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $4=9-c^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$.

Pela equação reduzida observamos que o eixo maior (eixo focal) é paralelo ao eixo *0x*. Como $C=(0,0)$, os focos pertencem ao eixo *0x*.

Logo, os focos são $F_1=(-\sqrt{5},0)$ e $F_2=(\sqrt{5},0)$, a excentricidade é $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercício 3: Uma elipse tem como equação $25x^2-50x+4y^2+16y-59=0$. Escrever esta equação na forma reduzida e esboçar o gráfico.

Solução: Primeiramente, iremos agrupar os termos em x, e os termos em y, e faremos o completamento de quadrado.

(I) $25x^2-50x=25(x^2-\underbrace{2}_{\substack{2a=2\\a=1\\a^2=1}}x)=25(\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1=25\left[(x-1)^2-1\right]$

(II) $4y^2+16y=4(y^2+\underbrace{4}_{\substack{2a=4\\a=2\\a^2=4}}y)=4(\underbrace{y^2+4y+4}_{(y+2)^2}-4)=4\left[(y+2)^2-4\right]$.

Logo, a equação $25x^2-50x+4y^2+16y-59=0$ pode ser escrita na forma

$$25\left[(x-1)^2-1\right]+4\left[(y+2)^2-4\right]-59=0\Rightarrow 25(x-1)^2-25+4(y+2)^2-16-59=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{25(x-1)^2+4(y+2)^2=100}.$$

Dividindo por 100 ambos os membros desta equação, obtemos a forma reduzida:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1.$$

Observe que neste caso o maior denominador $a^2=25$, se encontra no termo que envolve a variável y e assim o eixo focal (ou eixo maior) é paralelo ao eixo $0y$.

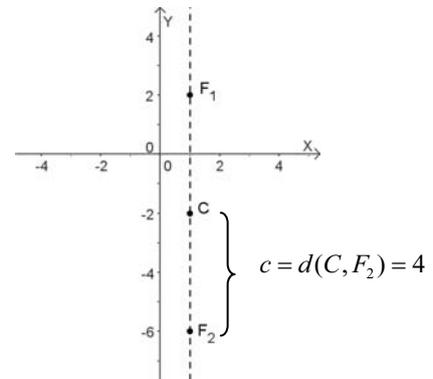
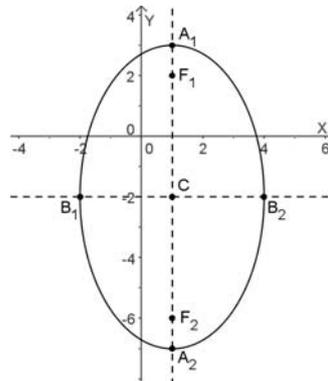
Para esboçar o gráfico da elipse $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ procedemos da seguinte forma.

(i) O eixo focal é paralelo ao eixo $0y$;

(ii) $a^2=25$ e $b^2=4$, assim $b^2=a^2-c^2\Rightarrow 4=25-c^2\Rightarrow c^2=16\Rightarrow \boxed{c=4}$;

(iii) O ponto $C(1,-2)$ é o centro da elipse. Veja ilustração com essas três etapas;

(iv) determinar F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 através dos valores $a=5,\ b=2$ e $c=4$, ou seja, $F_1=(1,-2+4)$, $F_2=(1,-2-4)$, $A_1=(1,-2+5)$, $A_2=(1,-2-5)$, $B_1=(1-2,-2)$ e $B_2=(1+2,-2)$.

(v) Esboçar o gráfico com:

$C=(1,-2),\ F_1=(1,2),\ F_2=(1,-6),\ A_1=(1,3),\ A_2=(1,-7),\ B_1=(-1,-2)\ e\ B_2=(3,-2)$.

No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

3.4 – Hipérbole

Para que possamos entender bem a definição da hipérbole, iremos primeiramente aprender a desenhá-la. Desta forma realize a seguinte experiência.

(I) em uma extremidade de uma haste (pode ser uma régua), prenda a ponta de um barbante;

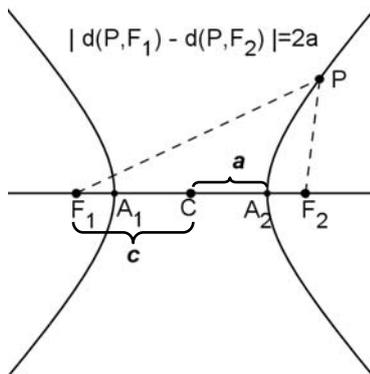
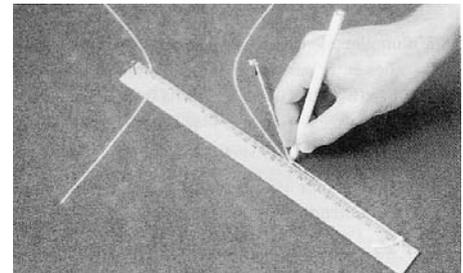
(II) fixe as outras extremidades da haste e do barbante em dois pontos distintos, F_1 e F_2, de uma tábua (a diferença entre o comprimento d da régua e o comprimento l do barbante deve ser menor do que a distancias $d(F_1,F_2)$, ou seja, $d-l<F_1F_2$);

(III) com a ponta de um lápis, pressione o barbante contra a régua, deslizando o grafite sobre a tábua, deixando o barbante esticado e sempre junto da régua;

(IV) repita a operação, invertendo os pontos de fixação na tábua, isto é, fixe a haste em F_2 e o barbante em F_1. Conforme a figura.

A figura ao lado construída é denominada hipérbole.

Definição: Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tais que $d\left(F_1,F_2\right)=2c, c>0$, chama-se hipérbole o conjunto dos pontos $P=\left(x,y\right)$ de um plano tais que a diferença, em módulo, das

distâncias $d\left(F_1,P\right)$ e $d\left(F_2,P\right)$ é constante *2a*, com $0<2a<2c$, ou seja, $\left|d\left(F_1,P\right)-d\left(F_2,P\right)\right|=2a$.

Na figura ao lado temos:

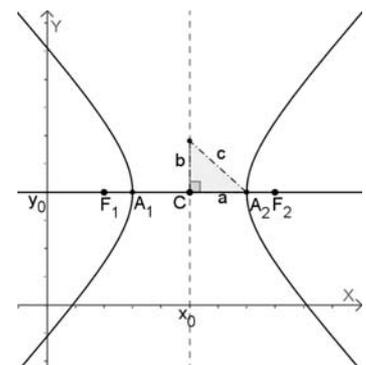
(I) F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $d\left(F_1,F_2\right)=2c$ a distância focal;

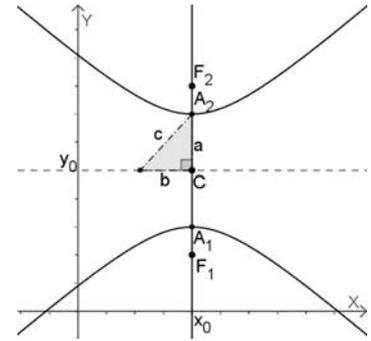
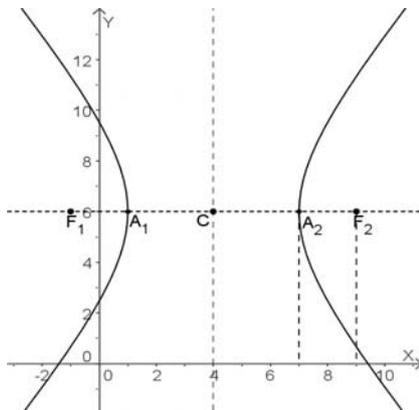
(II) A_1 e A_2 são os dois vértices da hipérbole, sendo $d\left(A_1,A_2\right)=d\left(F_2,A_1\right)-d\left(F_1,A_1\right)=2a$

(III) C é o centro da hipérbole, sendo C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ ou do segmento $\overline{A_1A_2}$, ou seja $d\left(F_1,C\right)=d\left(F_2,C\right)=c$ e $d\left(A_1,C\right)=d\left(A_2,C\right)=a$;

(IV) O número $e=\dfrac{c}{a}$, é a excentricidade da hipérbole (note que $e>1$, pois $c>a$)

Dada uma hipérbole de centro $C=\left(x_0,y_0\right)$ temos os seguintes casos:

Caso 1: Se o eixo focal é paralelo ao eixo *0x*, então a hipérbole pode ser representada pela equação reduzida $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$, como $b^2=c^2-a^2$ (Teorema Pitágoras).

Caso 2: Se o eixo focal é paralelo ao eixo $0y$, então a hipérbole pode ser representada pela equação $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$ com $b^2=c^2-a^2$.

Assim como na elipse, a demonstração dessas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P=(x,y)$ é um ponto da hipérbole de centro $C=(x_0,y_0)$ e foco $F_1=(x_0+c,y_0)$ e $F_2=(x_0-c,y_0)$ (eixo focal paralelo ao eixo $0x$), por exemplo, então desenvolvendo $|d(F_1,P)-d(F_2,P)|=2a$, onde $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)$, obtemos a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, com $b^2=c^2-a^2$.

Exercício 1: Obtenha a equação reduzida da hipérbole representada abaixo.

Solução:

Pelo gráfico vemos que:

i) $C=(4,6)$, $A_2=(7,6)$ e $F_2=(9,6)$;

ii) Como $d(A_2,C)=a$, então $d(A_2,C)=3=a$;

iii) Como $d(F_2,C)=c$, então $d(F_2,C)=5=c$;

iv) O eixo focal é paralelo ao eixo $0x$ e assim a equação da hipérbole é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Como $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b=4$, então a equação reduzida da hipérbole acima é: $\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{(y-6)^2}{16}=1$.

Exercício 2: Uma hipérbole tem como equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$. Escreva-a na forma reduzida.

Solução: Vamos fazer o completamento de quadrados:

(I) $x^2-\underbrace{6}_{\substack{2a=6\\a=3\\a^2=9}}x=\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9=(x-3)^2-9$

(II) $-9y^2-18y=-9(y^2+2y)=-9(y^2+2y+1-1)=-9\left[(y+1)^2-1\right]$.

Logo a equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$ se transforma na equação

$$x^2-9y^2-6x-18y-9=0 \Rightarrow (x-3)^2-9-9\left[(y+1)^2-1\right]-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2-9-9(y+1)^2 \cancel{+9} \cancel{-9}=0 \Rightarrow \boxed{(x-3)^2-9(y+1)^2=9}.$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por 9 teremos: $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$.

No Moodle...

Vamos nos encontrar na Plataforma Moodle para podermos discutir, através de exercícios, este conteúdo. Espero por você.

4- Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade, trabalhamos com as equações reduzidas das cônicas (Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole). Tudo que conhecemos hoje sobre a astronomia deve-se, em grande parte, ao estudo das cônicas. Por exemplo, a órbita que os planetas fazem em torno do Sol é descrita por elipses. Isto mostra quão importante é o estudo das Cônicas.

Agora é com você! Procure participar das discussões desenvolvidas no ambiente virtual e sempre que houver dúvidas procure seu professor tutor. Lembre-se que o conhecimento matemático é construído gradual e sistematicamente. Procure formar grupo de estudo e esteja constantemente em contato com a disciplina, seja revisando, exercitando ou discutindo no Moodle.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 3. 2000.

2. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: 1Moderna. Vol. 3. 2002.

3. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

4. GENTIL, Nelson S. **Matemática para o 2º grau**. Vol. 3. Ática, 7ª ed. São Paulo: 1998.